

TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. INTRODUCCIÓN

Existen distintas formas de expresar un sistema de ecuaciones lineales. La primera es la **forma clásica**, y define a un sistema de ecuaciones lineales como:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m &= c_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m &= c_2 \\ \dots & \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nm} \cdot x_m &= c_n \end{aligned} \right\}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones y de m incógnitas.

También puede expresarse en **forma matricial**:

$$A \cdot X = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Otra manera es en **forma vectorial**:

$$x_1 \cdot C_1 + x_2 \cdot C_2 + \dots + x_m \cdot C_m = C$$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Se define como **solución del sistema** el vector para el que se cumpla la condición de $A \cdot X = C$. Por tanto, X_0 es solución si:

$$A \cdot X_0 = C$$

Si un sistema no tiene solución es un *sistema incompatible*.

Si un sistema tiene solución es un *sistema compatible*.

Si tiene solución y ésta es única, el sistema es *compatible determinado*.

Si tiene más de una solución, el sistema es *compatible indeterminado*.

En los sistemas de ecuaciones lineales, si el sistema admite más de una solución, admite infinitas.

Desde el punto de vista de las **aplicaciones lineales**:

$$R^m \xrightarrow{A} R^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Y sea la matriz $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$

Si la matriz C es imagen de la aplicación, es un *sistema compatible*.

Si proviene de un único elemento del origen, es un *sistema compatible determinado*.

Si proviene de más de un elemento del origen, es un *sistema compatible indeterminado*.

Si no es imagen de la aplicación, es un *sistema incompatible*.

Se define la **matriz ampliada** de un sistema a la matriz de los coeficientes junto con la de los términos independientes:

$$A^* = (A|C) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & c_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & c_m \end{array} \right)$$

2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

El principal método de resolución de sistemas de ecuaciones es encontrar otros sistemas que sean equivalentes (que tengan soluciones idénticas), y resolver estos últimos.

Considerando un sistema en forma matricial, estos nuevos sistemas se encontrarán realizando en las matrices operaciones fila. Las operaciones columna también son válidas, pero favorecen la confusión.

a) Método de Cramer

Se puede aplicar siempre que la matriz de los coeficientes A sea cuadrada e inversible. Las condiciones son:

$$A \text{ cuadrada} \Leftrightarrow A \text{ inversible} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ existe} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

El sistema se resuelve como:

$$A \cdot X = C$$

$$X = A^{-1} \cdot C$$

En la práctica, cada uno de los componentes del vector solución se obtiene de la siguiente forma: del determinante de la matriz de los coeficientes se sustituye la columna correspondiente al término deseado por la de los términos independientes, y se divide por el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

$$A_i = (C_1 | C_2 \dots | C_i \dots | C_n)$$

- *Ejemplo:*

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ mediante el método de Cramer.

La matriz de los coeficientes y su determinante son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

El sistema expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La adjunta de A y su traspuesta son:

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (A^\alpha)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

La inversa es, entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

El sistema queda como:

$$X = A^{-1} \cdot C$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \cdot 3 + 1/6 \cdot 2 \\ 2/3 \cdot 3 - 1/3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Donde las soluciones son:

$$x = \frac{5}{6} \quad y = \frac{4}{3}$$

De esta forma se resuelve aplicando la primera parte del método de Cramer. Se puede hacer también de incógnita a incógnita:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad |A_1| = -5$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad |A_2| = -8$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$
$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

b) Teorema de Rouché-Fröbenius

El sistema $A \cdot X = C$ es compatible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.

Si el sistema es compatible y tiene m incógnitas:

- es *determinado* $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = m$
- es *indeterminado* $\Leftrightarrow \text{rg}(A) < m$

Demostración de que es compatible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.

Dado el sistema $x_1 \cdot C_1 + x_2 \cdot C_2 + \dots + x_m \cdot C_m = C$

Las distintas columnas C_m son vectores de R^n . Así, el vector C depende linealmente de dichas columnas.

Por lo tanto, si el rango de la matriz de coeficientes coincide con la ampliada, realmente dicho vector C es combinación lineal, y puede hallarse un vector X tal que se cumpla la condición.

$$\text{rg}\{C_1, C_2, \dots, C_m\} = \text{rg}\{C_1, C_2, \dots, C_m, C\}$$

Si el rango de la ampliada es mayor, significa que el vector C no es combinación lineal de los anteriores, por lo que no podría encontrarse ningún X solución.

Demostración de que es determinado o indeterminado dependiendo del rango

Dada la aplicación lineal de $R^n \rightarrow R^m$. Dependiendo del rango de la matriz de los coeficientes A :

- $\text{rg}(A) = m \rightarrow$ es *inyectiva*

$$A \cdot X = A \cdot X' \Leftrightarrow X = X'$$

- $\text{rg}(A) < m \rightarrow$ no es inyectiva

$$A \cdot X = A \cdot X' \rightarrow X' = X + B$$

$$A \cdot X = C \rightarrow A \cdot (X + B) = C \rightarrow A \cdot X + A \cdot B = C$$

Sólo es cierto si B pertenece al núcleo, para que $A \cdot B$ sea nulo.

- *Ejemplo:*

$$\text{Resolver el sistema } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z - t = 1 \\ 2x - 3y + z + t = 2 \\ x + 9y + 2z - 4t = 1 \end{array} \right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

Todos los menores de orden tres se anulan tanto en A como en A^* .

Existe algún menor de orden dos no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 \rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (S.C.I.)}$$

El sistema equivalente resulta:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 - z + t \\ 2x - 3y = 2 - z - t \end{array} \right\}$$

Ejercicio: Resolver este último sistema.

$$\text{Soluciones: } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 1/7 t - 5/7 z \\ y = 3/7 t - 1/7 z \\ z = z \\ t = t \end{array} \right.$$

Un **sistema homogéneo** es del tipo:

$$A \cdot X = 0$$

Resolver un sistema homogéneo es igual que calcular el núcleo de la aplicación lineal correspondiente al mismo.

$$\{X \in R^m / A \cdot X = 0\} = \ker(A)$$

Una **solución general** de un sistema se puede escribir como suma de otra solución general distinta y de una solución particular:

- Si X_0 es *solución particular* de $A \cdot X = C$ (es decir, $A \cdot X_0 = C$).
- Si X es *solución general* de $A \cdot X = 0$.

Entonces $X + X_0$ es solución general de $A \cdot X = C$.

$$\begin{aligned} A \cdot (X + X_0) &= A \cdot X + A \cdot X_0 = A \cdot X_0 = C \rightarrow A \cdot (X + X_0) = C \\ &\downarrow \\ 0 & (\in \ker) \end{aligned}$$

- *Ejemplo:*

$$\text{Resolver el sistema } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array} \right.$$

La matriz de coeficientes y su determinante son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

No tiene rango tres, por lo que se busca rango dos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < n \text{ (incógnitas)} \rightarrow \text{S.C. Indeterminado}$$

Realizando operaciones fila en la matriz ampliada:

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2' = F_1 \\ F_1' = F_2 \\ F_3' = F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - 2 \cdot F_1 \\ F_3' = F_3 - 3 \cdot F_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3' = F_3 - F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{rg}(A) = 2 \end{array}$$

$$\dim f(A) - \text{rg}(A) = \dim(\ker f(A)) \rightarrow \dim(\ker f(A)) = 1$$

Por lo tanto, las soluciones dependerán de un único parámetro.

Escogiendo como parámetro a la variable z , y resolviendo el sistema, queda:

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = (1/11)z \\ y = (3/11)z \\ z = z \end{cases}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1/11 \\ 3/11 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) Métodos directos

Otros métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales son:

- *método de Gauss*: Consiste en pasar mediante operaciones fila de la matriz A^* a una equivalente que sea escalonada (a ser posible, triangular superior), y se resuelve de abajo hacia arriba (o al revés).

$$\text{Del tipo: } \begin{pmatrix} 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- *método de Gauss-Jordan*: Es igual al método de Gauss, salvo que se pretende llegar a una matriz diagonal.
- *método de L U* : Es el que se estudiará a continuación. Se trata de descomponer la matriz A en dos matrices L y U mediante las cuales se consigue la solución de manera más rápida.

d) Método L U

Este método consiste en la descomposición de la matriz A en otras dos matrices.

Se utiliza cuando la matriz A es cuadrada, de tamaño n , y su rango coincide con n ($\text{rg}(A) = n$), por lo que tiene solución única.

La descomposición es la siguiente:

$$A = L \cdot U \quad (= I \cdot S)$$

La matriz L es triangular inferior (*Low*), y la matriz U es triangular superior (*Up*).

La resolución se hará de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= C \\ L \cdot U \cdot X &= C \quad \text{si } Y = U \cdot X \\ L \cdot Y &= C \end{aligned}$$

Se obtiene un valor Y_0 , con el que se resuelve la primera ecuación:

$$U \cdot X = Y_0$$

Donde $X = X_0$ es solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} U \cdot X_0 &= Y_0 \\ L \cdot U \cdot X_0 &= C \\ A \cdot X_0 &= C \end{aligned}$$

El proceso de cálculo consiste en partir de la matriz A y la matriz identidad. Todo cambio que se realice en la matriz A influirá en la identidad de la siguiente forma:

- Sustitución de una fila por una combinación lineal de otras:
en la matriz identidad el coeficiente empleado cambia de signo.
- Producto de una fila por un número:
en la matriz identidad se usa su inverso.

Siempre que sea posible se empezará por hacer combinaciones lineales. En el mismo paso no pueden combinarse sustituciones y productos.

- *Ejemplo:*

Obtener las matrices L y U correspondientes a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

A partir de esta matriz A conseguiremos la matriz U :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2' = F_2 - 5 \cdot F_1 \\ F_3' = F_3 - 2 \cdot F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -14 & -10 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3' = F_3 - 1/7 \cdot F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -14 & -10 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{pmatrix} = U$$

El proceso seguido tiene su imagen en la matriz identidad:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} = L$$

También se podría haber llegado a otra solución, operando de forma algo distinta. En la matriz A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2' = F_2 - 5 \cdot F_1 \\ F_3' = F_3 - 2 \cdot F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -14 & -10 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2' = -1/14 \cdot F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ F_3' = F_3 + 2 \cdot F_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3' = 7/3 \cdot F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Y en la matriz identidad:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3/7 \end{pmatrix} = L$$

- *Ejemplo:*

Resolver el siguiente sistema por el método $L U$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos las matrices L y U obtenidas en la segunda parte del ejemplo anterior.

$$L \cdot Y = C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \\ 3/7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -13 \end{matrix} \rightarrow Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot X = Y_0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 22/7 \\ x_2 = 58/7 \\ x_3 = -13 \end{matrix}$$

Ejercicio: Resolver el mismo sistema utilizando ahora las otras matrices L y U del ejemplo anterior.

Ejercicio: Resolver el mismo sistema para $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$. Solución: $X = \begin{pmatrix} -25/6 \\ 149/6 \\ -98/3 \end{pmatrix}$

3. MÉTODOS ITERATIVOS

Los métodos iterativos se basan en la consideración del **punto fijo**:

x es un punto fijo si cumple que:

$$f: R \rightarrow R \quad x \in R \quad f(x) = x$$

Por lo tanto, la resolución del sistema se traduce en la búsqueda de dicho punto fijo. Para ello, se parte de una sucesión:

$$a_0 \xrightarrow{f} a_1 \xrightarrow{f} a_2 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} a_n \rightarrow x$$

$$a_i = f(a_{i-1})$$

$$\text{si } a_n \approx a_{n+1} \rightarrow a_n \approx x$$

No siempre es posible que esta sucesión alcance un punto fijo, pero en caso de que lo haga, esa será la solución.

En los **sistemas de ecuaciones**:

$$A \cdot X = C$$

Si se descompone la matriz A en dos matrices E y F :

$$A = E - F$$

$$(E - F) \cdot X = C \rightarrow E \cdot X - F \cdot X = C \rightarrow E \cdot X = C + F \cdot X$$

Si la matriz E tiene inversa:

$$X = E^{-1} \cdot C + E^{-1} \cdot F \cdot X$$

Tomando un vector arbitrario $X^{(0)}$, y operándolo en la expresión anterior un número determinado de veces:

$$X^{(0)} \xrightarrow{f} X^{(1)} \xrightarrow{f} X^{(2)} \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} X^{(n)}$$

$$\text{hasta que } X^{(n)} \approx X^{(n+1)}$$

a) Método de Jacobi

Es el método iterativo más sencillo. Para estudiar su funcionamiento veremos cómo se opera una matriz cuadrada de orden 4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \quad F = E - A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{44} \end{pmatrix}$$

$$X = E^{-1} \cdot C + E^{-1} \cdot F \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} c_1/a_{11} \\ c_2/a_{22} \\ c_3/a_{33} \\ c_4/a_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & -a_{14}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & -a_{24}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & -a_{34}/a_{33} \\ -a_{41}/a_{44} & -a_{42}/a_{44} & -a_{43}/a_{44} & 0 \end{pmatrix} \cdot X$$

• Ejemplo: $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Los distintos valores que irán apareciendo son:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; X^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -3/4 \\ 6/7 \end{pmatrix}; X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,913 \\ -0,928 \\ 0,954 \end{pmatrix}; \dots; X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,992 \\ -0,993 \\ 0,996 \end{pmatrix}; X^{(5)} = \begin{pmatrix} 0,997 \\ -0,998 \\ 0,998 \end{pmatrix}; X^{(6)} = \begin{pmatrix} 0,999 \\ -0,999 \\ 0,999 \end{pmatrix}$$

$$X \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una condición suficiente para poder resolver sistemas por este método es que la matriz A sea **diagonal dominante**.

Una matriz es diagonal dominante si, para cada fila, el valor absoluto del elemento de la diagonal principal es mayor estricto que la suma de los valores absolutos de los restantes elementos de la fila.

• *Ejemplo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} |7| > |3| + |1| \\ |4| > |1| + |0| \\ |-7| > |2| + |1| \end{array} \end{array} \right\} \text{ se puede resolver}$$

Está permitido cambiar filas para que una no dominante lo sea.

b) Método de Gauss-Seidel

Este método acelera la convergencia.

Las matrices de los vectores actual y siguiente son:

$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \\ x_4^{(i)} \end{pmatrix} \quad X^{(i+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i+1)} \\ x_2^{(i+1)} \\ x_3^{(i+1)} \\ x_4^{(i+1)} \end{pmatrix}$$

Las dos primeras componentes del segundo vector se pueden calcular como:

$$x_1^{(i+1)} = \frac{c_1}{a_{11}} + \frac{-a_{12}}{a_{11}} x_2^{(i)} + \frac{-a_{13}}{a_{11}} x_3^{(i)} + \frac{-a_{14}}{a_{11}} x_4^{(i)}$$

$$x_2^{(i+1)} = \frac{c_2}{a_{22}} + \frac{-a_{21}}{a_{22}} x_1^{(i)} + \frac{-a_{23}}{a_{22}} x_3^{(i)} + \frac{-a_{24}}{a_{22}} x_4^{(i)}$$

Pero en la segunda componente volvemos a utilizar la componente $x_1^{(i)}$, y puesto que ya hemos calculado la componente $x_1^{(i+1)}$, aceleraríamos el proceso colocándola en la expresión, quedando:

$$x_2^{(i+1)} = \frac{c_2}{a_{22}} + \frac{-a_{21}}{a_{22}} x_1^{(i+1)} + \frac{-a_{23}}{a_{22}} x_3^{(i)} + \frac{-a_{24}}{a_{22}} x_4^{(i)}$$

La tercera componente resulta:

$$x_3^{(i+1)} = \frac{c_3}{a_{33}} + \frac{-a_{31}}{a_{33}} x_1^{(i+1)} + \frac{-a_{32}}{a_{33}} x_2^{(i+1)} + \frac{-a_{34}}{a_{33}} x_4^{(i)}$$

La descomposición de la matriz A que se usa en este método es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Cuando un sistema $A \cdot X = C$ es incompatible, se puede buscar un vector para el cual el sistema “casi” se cumpla, es decir, que la diferencia entre ambos términos sea lo más cercana al cero que se pueda:

$$A \cdot X - C \rightarrow 0$$

Si se opera esa expresión:

$$A \cdot X - C = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Se trataría de minimizar la expresión:

$$|d_1| + |d_2| + \dots + |d_n|$$

U otra similar. Si la expresión que se minimiza es la siguiente, estaremos hallando la expresión de **mínimos cuadrados**.

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$$

Por lo tanto, la solución al siguiente sistema es la que consigue que lo anterior sea mínimo:

$$A^t \cdot A \cdot X = A^t \cdot C$$

NOTA: No pueden simplificarse los dos términos A^t , pues la igualdad resultante se sabe que no es exacta.

Ejercicio: Encontrar la recta que más se aproxime a los siguientes puntos:

